Notion de Probabilités

1. Définitions et vocabulaire

Une **expérience aléatoire** (du latin « **alea »** qui signifie « dé », « jeu de dé » ou « hasard ») est un phénomène dont on ne peut pas prévoir de façon certaine le résultat.

- Elle conduit à des résultats possibles qu'on est parfaitement capable de nommer.
- On ne sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on réalise l'expérience.

Les résultats d'une expérience aléatoire sont appelés **issues**

Un **évènement** est un ensemble d'issues.

Un évènement réalisé par une seule issue est appelé **évènement élémentaire.**

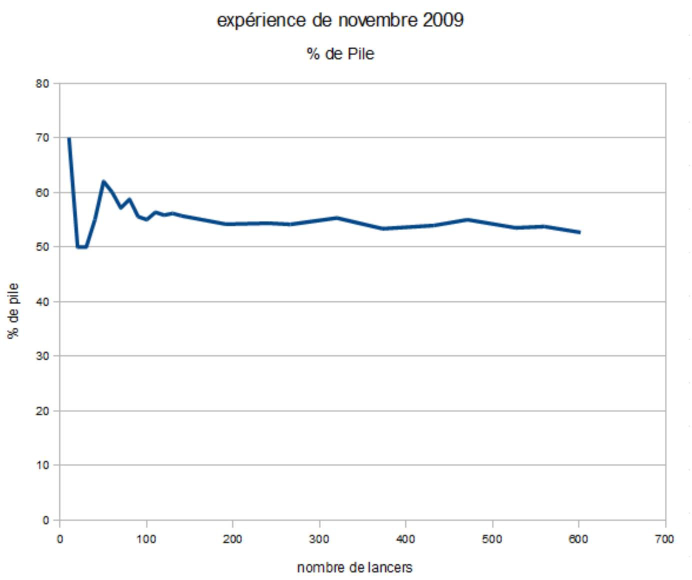
Quand une expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois, la fréquence relative de réalisation d'un évènement finit par se stabiliser autour d'une valeur particulière qui est **la probabilité de cet évènement.**

2. Exemple du lancer de pièce : « Pile ou face ? »

Lorsqu'on lance une pièce non truquée, 2 issues sont possibles : « obtenir Pile » ou « obtenir Face ».

Intuitivement, on sait que les « *chances* » d'obtenir « pile » ou « face » sont équivalentes
(on dira que les deux **événements** : « obtenir Pile » et « obtenir Face » sont équiprobables).
On a donc 1 chance sur 2 d'obtenir « Pile », on dira que la « **probabilité** » d'obtenir « pile » est de $\frac{1}{2}$.

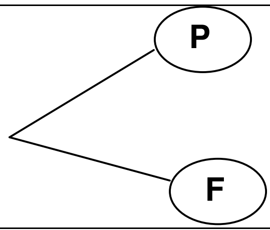
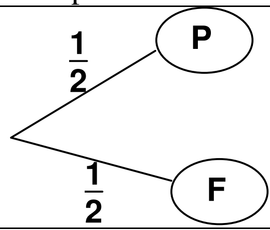
*vérification **expérimentale de** cette probabilité :*



La proportion de « Pile », d'abord très changeante (fluctuante), se stabilise, après un grand nombre de lancers, autour de 0,5 (ou 50% ou $\frac{1}{2}$) .On retrouve ainsi la « probabilité », intuitive ou calculée, d'obtenir « Pile », qui est de 0,5 (ou 50% ou $\frac{1}{2}$).

Représentation des probabilités par un arbre

L'arbre des possibles d'une expérience indique chacune des issues.
On peut faire figurer sur chaque branche la probabilité associée.

Expérience Situation étudiée	Arbre des possibles	Arbre pondéré avec les probabilités
Tirage à pile ou face		

3. Exemple du lancer de dés

On dispose d'un dé cubique, bien équilibré et sans défaut, sur les faces duquel sont inscrits les nombres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. On lance ce dé sur une table et on lit le nombre inscrit sur la face supérieure.
Cette expérience est aléatoire, voici quelques événements possibles :
les issues possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Événement	**Probabilité**	**Remarque**
« obtenir 5 » est un évènement **élémentaire**. « obtenir 4 » est un autre évènement **élémentaire**.	$\frac{1}{6}$	Il y a 6 évènements élémentaires qui sont dans cet exemple **équiprobables**. La somme de tous les évènements élémentaires est toujours égale à 1. Dans cet exemple : $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$
« obtenir un nombre pair » est un événement qui a : 3 **issues** possibles : 2 ; 4 ; 6	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$	Ces deux évènements sont des évènements « **contraires** ». **La somme de leur probabilité est égale à 1**
« obtenir un nombre impair » est un événement qui a : 3 **issues** possibles : 1 ; 3 ; 5	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$	
« obtenir un multiple de 3 » est un événement qui a : 2 issues possibles : 3 et 6	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	Ces deux évènements sont des évènements **incompatibles**, ils ne se produisent pas en même temps (ils n'ont pas d'issues en commun)
« obtenir un diviseur de 8 » est un événement qui a : 3 issues possibles : 1; 2 ; 4	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	
Évènement : « obtenir 7 »	0	Évènement **impossible**
Évènement: « obtenir un nombre entre 0 et 7 »	1	Évènement **certain**

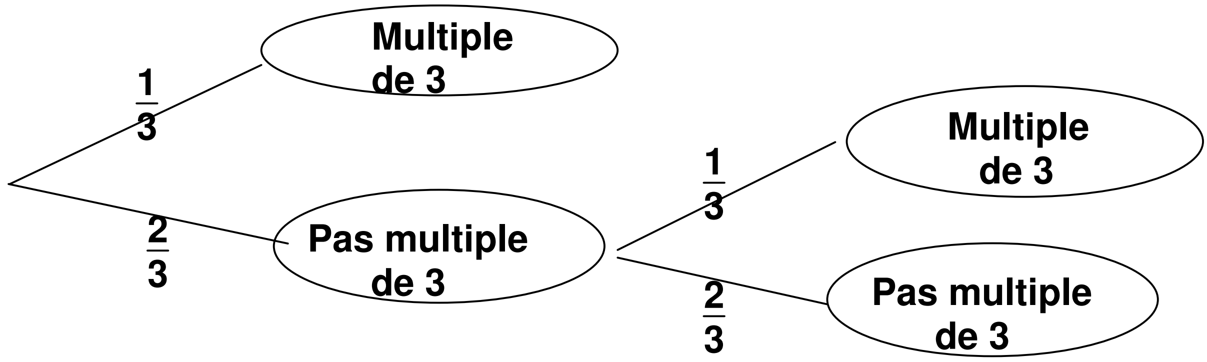
4. Expériences aléatoires à 2 épreuves

Exemple : Un jeu de dé en 2 lancers

Règle du jeu :
au premier lancer, si j'obtiens un multiple de 3 je gagne, sinon je rejoue.
au deuxième lancer, si j'obtiens un multiple de 3, je gagne, sinon j'ai perdu.

On cherche la probabilité de l'évènement « je gagne ».

Voici un arbre pondéré des possibles :

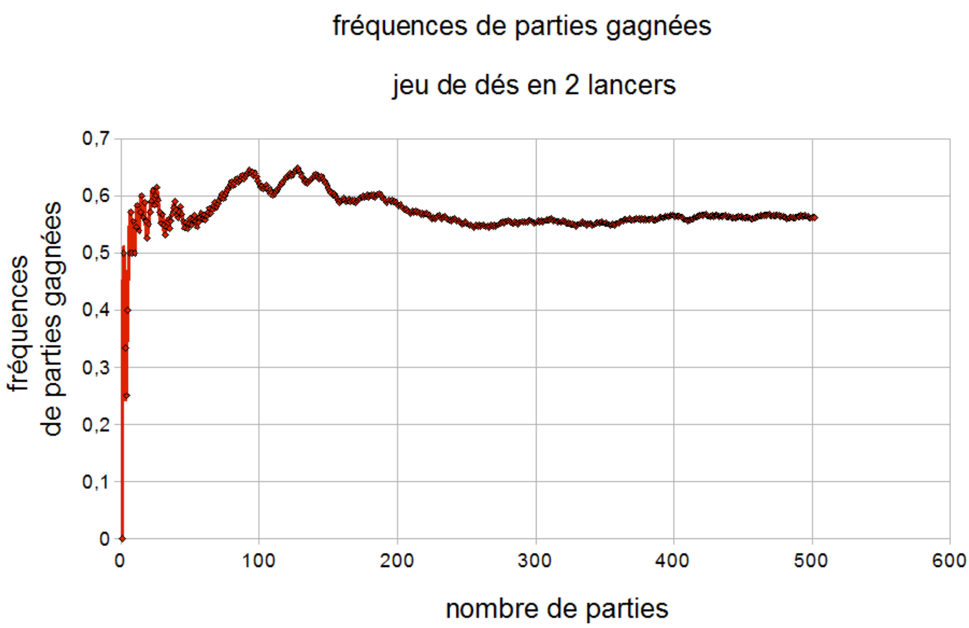


Recherche directe avec l'arbre pondéré :

Gagner au 1^er lancer : La probabilité est $\frac{1}{3}$

Ne pas gagner au 1^er lancer, puis gagner au 2^ème : la probabilité est $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Finalement, la probabilité cherchée est $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9} \approx 0{,}55$



On constate que la courbe se stabilise après un grand nombre de parties, vers une valeur proche de la probabilité calculée, qui est environ 0,55.

Supposons qu'on joue 1000 parties

<table>
<tr>
<td>Déjà, on a 1 chance sur 3(ou 2 chances sur 6) d'obtenir un multiple de 3 au 1^{er} lancer, donc il y a déjà $\frac{1}{3}\times 1000$ parties gagnées.</td>
<td rowspan="3"><u>Résumé du calcul :</u>
Nombre théorique de parties gagnées

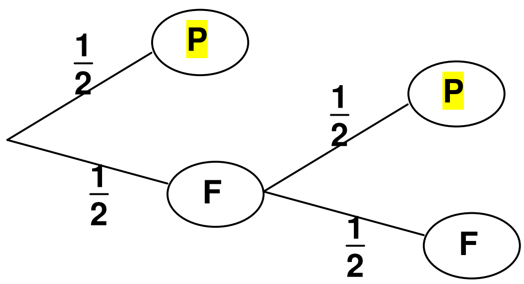
$N = \frac{1}{3}\times 1000 + \frac{1}{3}\times \frac{2}{3}\times 1000$
$N = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times \frac{2}{3})\times 1000$
$N = (\frac{1}{3} + \frac{2}{9})\times 1000$
$N = \frac{5}{9}\times 1000$
$N \approx 556$</td>
</tr>
<tr>
<td>Donc il y a $\frac{2}{3}\times 1000$ lancers à refaire, et <u>parmi ceux-ci</u>, on a encore 1 chance sur 3 d'obtenir un multiple de 3 donc on aura $\frac{1}{3}$ des $\frac{2}{3}\times 1000$ nouvelles parties gagnées.</td>
</tr>
<tr>
<td>Finalement, sur 1000 parties, on aura théoriquement $\frac{1}{3}\times 1000 + \frac{1}{3}\times \frac{2}{3}\times 1000$ parties gagnées soit environ 556</td>
</tr>
</table>

<u>Exemple: Un jeu de pile ou face</u>

<u>Rappel de la règle du jeu :</u> Je joue à pile ou face en deux coups :
au premier lancer, si j'obtiens pile je gagne, sinon je rejoue.
au deuxième lancer, si j'obtiens pile je gagne, sinon je perds.

On cherche la probabilité de l'évènement « je gagne ».

On peut rechercher toutes les **<u>issues</u>** possibles avec un arbre pondéré des possibles :
L'évènement « je gagne » est réalisé par deux issues qui sont : P et (F ; P).



<u>Recherche directe avec l'arbre pondéré</u>

Propriété : Dans un arbre, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Pile au 1^{er} lancer. La probabilité est $\frac{1}{2}$

Face au 1^{er} lancer, puis Pile au $2^{ème}$. La probabilité est $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{4}$

Finalement, la probabilité cherchée est $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=0,75$.